Intégrales et Primitives

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Théorèmes d'intégration

Croissance de l'intégrale

Hypothèses :

f et g continues sur I
$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$
$(a, b) \in I^2, a \leq b$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

Linéarité de l'intégrale

Hypothèses :

f et g continues sur I
$(a, b) \in I^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

Inégalités

Inégalité triangulaire

Hypothèses :

f est continue sur I
$(a, b) \in I^2, a \leq b$

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Hypothèses :

f et g sont continues sur I
$(a, b) \in I^2, a \leq b$

$$\boxed{\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x}$$

Manœuvres

Intégration par parties

Hypothèses :

f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I
$(a, b) \in I^2, a \leq b$

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t}$$

Changement de variable

Hypothèses :

f continue sur I
$\varphi : J \to I$ sont $\mathcal{C}^1$
$(a, b) \in I^2, a \leq b$
$(\alpha, \beta) \in J^2, a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \varphi'(t)f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) \text{ donc } \mathrm{d}u = \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Règles de Bioche

Hypothèses : f est composée de fractions, $\sin, \cos, \tan$... (fonctions “simples”)

$$\boxed{f(u) \neq 0 \text{ et } \mathrm{d}(-u) = \mathrm{d}u \implies \begin{matrix} t = \cos(u) \\ \mathrm{d}t = -\sin(u)\mathrm{d}u \end{matrix}}$$

$$\boxed{f(\pi - u) \neq 0 \text{ et } \mathrm{d}(\pi - u) = \mathrm{d}u \implies \begin{matrix} t = \sin(u) \\ \mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u \end{matrix}}$$

$$\boxed{f(\pi + u) \neq 0 \text{ et } \mathrm{d}(\pi + u) = \mathrm{d}u \implies \begin{matrix} t = \tan(u) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \end{matrix}}$$

Intégrales impropres

Convergence ou divergence

$$\boxed{\forall x \in [a,b[, F(x) = \int_{[a,b[} f \quad \text{Alors } I = \int_{[a,b[} f \text{ converge en } b \iff \lim_{x \to b^-} F(x) \text{ existe et est finie}}$$

Intégrales courantes

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ converge en } 0}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{Kt}\mathrm{d}t \text{ converge en } +\infty \iff K < 0}$$

Critère de Riemann

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ diverge } \forall \alpha}$$

$$\boxed{\int_0^{b} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ diverge} \iff \alpha < 1}$$

Intégrale faussement impropre

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur }]a,b] \text{ et a une limite finie en } a^+, \int_a^b f \text{ converge en } a}$$

Convergence par majoration

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est } \underline{cpm} \text{ et } \underline{\text{positive}} \text{ sur } [a,b[, \int_{[a,b[} f \text{ converge} \iff F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ est majorée}}$$

Comparaison des fonctions

<u>Ne pas comparer les intégrales, comparer les fonctions</u>

Si f et g sont <u>*cpm*</u> sur $[a,b[$ et $\forall t \in [a,b[, f(t) \leq g(t)$,

$$\int_{[a,b[} g \text{ converge} \implies \int_{[a,b[} f \text{ converge et } \int_{[a,b[} f \leq \int_{[a,b[} g$$

$$\int_{[a,b[} f \text{ diverge} \implies \int_{[a,b[} g \text{ diverge}$$

Comparaison des $\sim$, o et O

<u>Ne pas comparer les intégrales, comparer les fonctions</u>

Si f et g sont <u>*cpm*</u> sur $[a,b[$ et g est <u>positive</u>,

$$f = O(g) \implies \begin{cases} \int_{[a,b[} g \text{ converge} \implies \int_{[a,b[} f \text{ converge} \\ \int_{[a,b[} f \text{ diverge} \implies \int_{[a,b[} g \text{ diverge} \end{cases}$$

$f = o(g) \implies$ Idem

$$f = \sim (g) \implies \int_{[a,b[} f \text{ converge} \iff \int_{[a,b[} g \text{ converge}$$

Comparaison et convergence absolue

Ne pas comparer les intégrales, comparer les fonctions

Si f et g sont *cpm* sur $[a,b[$ et g est positive,

$f = O(g)$ et $\int_{[a,b[} g$ converge $\implies \int_{[a,b[} f$ converge absolument et $\int_{[x,b[} f = O\left(\int_{[x,b[} g\right)$

$f = O(g)$ et $\int_{[a,b[} g$ diverge $\implies \int_{[a,x[} f = O\left(\int_{[a,x[} g\right)$

Idem pour $f = o(g)$ et $f =\sim (g)$

Idem pour d'autres formes d'intervalles

Convergence absolue

Si f est *cpm* sur I

$$\int_I |f| \text{ converge } \implies \int_I f \text{ converge et } \left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$$

Convergence absolue et convergence

$$\int_I f \text{ converge absolument } \implies \int_I f \text{ converge}$$

Intégration par parties

Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$

$$\lim_{x\to b^-} f(x)g(x) \text{ existe et est finie } \implies \begin{cases} \int_I fg' \text{ et } \int_{[a,b[} f'g \text{ sont de même nature} \\ \text{Si elles convergent, } \int_{[a,b[} fg' = \lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_{[a,b[} f'g \end{cases}$$

De même pour d'autres formes d'intervalles

Changement de variable

Si φ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[\alpha,\beta[$ et $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = \lim_{x\to\beta^-} \varphi(x)$

Si f est *cpm* sur $[a,b[$

$$\int_a^b f \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u \text{ sont de même nature}$$

$$\text{Si elles convergent, } \int_a^b f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Intégrales à paramètre

Soit une fonction

$$\begin{aligned} f : X \times T &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) \end{aligned}$$

Continuité

$$\begin{cases} \forall t \in T, x \mapsto f(x,t) \text{ est } \boxed{\textit{continue}} \text{ sur } X \\ \Big(\forall x \in X, t \mapsto f(x,t) \text{ est } \textit{cpm} \text{ sur } T\Big) \\ \exists \varphi \ \textit{cpm} \ \text{ et } \underline{\text{intégrable}} \text{ sur } T, \forall (x,t) \in X \times T, |f(x,t)| \leq \varphi(t) \end{cases} \implies g : x \mapsto \int_T f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est continue sur } X$$

Dérivabilité

$$\begin{cases} \forall t \in T, x \mapsto f(x,t) \text{ est } \boxed{\mathcal{C}^1} \text{ sur} X \\ \forall x \in X, t \mapsto f(x,t) \begin{cases} t \mapsto f(x,t) \text{ est } \underline{\text{intégrable}} \ \Big(\textit{et cpm}\Big) \text{ sur } T \\ \Big(t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est } \textit{cpm} \text{ sur } T\Big) \end{cases} \\ \exists \varphi \ \textit{cpm} \ \text{ et } \underline{\text{intégrable}} \text{ sur } T, \forall (x,t) \in X \times T, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \end{cases} \implies \begin{cases} g : x \mapsto \int_T f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } X \\ g'(x) = \displaystyle\int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Dérivations successives

$$\begin{cases} \forall t \in T, x \mapsto f(x,t) \text{ est } \boxed{\mathcal{C}^k} \text{ sur} X \\ \forall x \in X, t \mapsto f(x,t) \begin{cases} \forall j < k, t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \text{ est } \underline{\text{intégrable}} \ \Big(\textit{et cpm}\Big) \text{ sur } T \\ \Big(t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial^k x}(x,t) \text{ est } \textit{cpm} \text{ sur } T\Big) \end{cases} \\ \exists \varphi \ \textit{cpm} \ \text{ et } \underline{\text{intégrable}} \text{ sur } T, \forall (x,t) \in X \times T, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \end{cases} \implies \begin{cases} g : x \mapsto \displaystyle\int_T f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } X \\ \forall j < k, g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_T \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t \end{cases}$$